8. Operações com as séries de potências

Lembrete 8.0.1 Uma série de potências tem forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n. \tag{8.1}$$

Lembre que:
1) Existe $R > 0$ (pode ser 0 ou ∞) tal que (8.1) converge em $(a-R, a+R)$ e diverge em $(-\infty, a-R) \cup (a+R, \infty)$. R chama-se *raio de convergência*.
2) Intervalo de convergência I é aquele que consiste de todos os valores de x tais que (8.1) converge. Tem 4 formas possíveis do I:

$$(a-R, a+R), \quad (a-R, a+R], \quad [a-R, a+R), \quad [a-R, a+R].$$

■ **Exemplo 8.1** Ache R e I no caso

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n (x-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 (x-1)^n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n}.$$

Solução. Pela regra de D'Alambert temos que $R = \dfrac{1}{l}$, onde

$$l = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n \cdot (2n+2)} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{1}{2n+2} = 0.$$

Portanto $R = \infty$ e $I = \mathbb{R}$. ;-)

■ **Exemplo 8.2** Ache R e I no caso

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n (x-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2+(-1)^n)^n}.$$

Solução. Pela regra de Cauchy temos $R = \dfrac{1}{l}$, onde

$$l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(2+(-1)^n)^n} = \lim_{n\to\infty} (2+(-1)^n).$$

Como $2+(-1)^n = 1$ ou 3 (dependendo da paridade de n), assim o limite não existe. Por outro lado podemos escrever

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2+(-1)^n)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3^{2n}} + \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-1}.$$

Denote por $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{3^{2n}}$ e $S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-1}$. Assim para S_1 temos:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{2n+2}}{3^{2n+1}} \cdot \frac{3^n}{|x|^{2n}} = \frac{1}{9}|x|^2.$$

Se $\dfrac{1}{9}|x|^2 < 1$ ou $|x| < 3$, então S_1 converge e $R_1 = 3$ neste caso.

Para S_2 temos

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = |x|^2$$

e R_2=1 neste caso. Portanto $R = 1$ para a série inicial. Agora se $x = 1$, então S_1 converge e S_2 diverge (pelo Teste de termo geral). Se $x = -1$, assim S_1 converge e S_2 diverge (pelo Teste de termo geral). Logo $I = (-1,1)$. ;-)

8.1 Operações com as séries de potências

Lembrete 8.1.1 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$ para $|x| < 1$ ou seja $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ é uma função contínua em $(-1,1)$. O próximo teorema generaliza este fato para o caso de uma série arbitrária.

Teorema 8.1.2 Seja $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ com intervalo de convergência I, assim a função

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n : I \to \mathbb{R}$$

é contínua em I.

Obs Note que $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ coincide com $\dfrac{1}{1-x}$ só em $(-1,1)$.

Exemplo 8.3 Ache a soma da série $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$. Temos que

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots = \frac{1}{1-(-x^2)} = \frac{1}{1+x^2},$$

para $|x|^2 < 1$ ou $|x| < 1$.

Exemplo 8.4 Ache a soma da série $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{n+3}}{2^{n+1}}$. Temos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+3}}{2^{n+1}} = \frac{x^3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{2^n} = \frac{x^3}{2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{-x}{2}} = \frac{x^3}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{2}} = \frac{x^3}{2+x},$$

para $\left|\dfrac{x}{2}\right| < 1$ ou $|x| < 2$.

Exemplo 8.5 Ache a expansão em série de potências em torno de $x = 0$ para a função $f(x) = \dfrac{1}{1+2x^3}$. Temos

$$\frac{1}{1+2x^3} = \frac{1}{1-(-2x^3)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-2x^3)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-2x^3)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot 2^n\cdot x^{3n}.$$

para $|2x^3| < 1$ ou $|x| < \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Exemplo 8.6 Ache a expansão em série de potências em torno de $x = 0$ para a função $f(x) = \dfrac{x^5}{5x+3}$. Temos

$$\frac{x^5}{5x+3} = \frac{x^5}{3}\cdot\frac{1}{\frac{5}{3}x+1} = \frac{x^5}{3}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{5}{3}x)} = \frac{x^5}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{5}{3}x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot(\frac{5}{3})^n\cdot x^{n+5}.$$

para $|\frac{5}{3}x| < 1$ ou $|x| < \dfrac{3}{5}$.

Exemplo 8.7 Ache a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot x^{n-1}$.

Será que podemos proceder assim (veja resposta no Teorema 8.1.3)?

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(x^n)' \stackrel{?}{=} \Big(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\Big)' = \Big(\frac{1}{1-x}\Big)' = \frac{1}{(1-x)^2},$$

para $|x| < 1$.

■ **Exemplo 8.8** Ache a soma da série $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$.

Será que podemos proceder assim (veja resposta no Teorema 8.1.3)?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \int x^n dx \stackrel{?}{=} \int \Big(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\Big) dx = \int \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-x) + C,$$

para $|x| < 1$.

Teorema 8.1.3 Seja $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ com raio R e intervalo de convergência I. Assim a função

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n : I \to \mathbb{R},$$

1) é diferenciável em $(a-R, a+R)$ e

$$f'(x) = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n\Big)' = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n (x-a)^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1}, \; e \tag{8.2}$$

2)

$$\int f(x) dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int c_n (x-a)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}. \tag{8.3}$$

Além disso os raios de convergência das séries (8.2) e (8.3) coincidem com R.

Obs

1) A função

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

com raio R admite derivadas de todas as ordens em $(a-R, a+R)$.

2) O Teorema 8.1.3 não vale para as séries das funções. De fato, $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}$ converge absolutamente (pela comparação) para todo x, mas $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(nx)}{b}$ não converge para $x = 2\pi k$.

■ **Exemplo 8.9** Ache a expansão em série de potências em torno de $x = 0$ para a função $f(x) = \ln(1+x)$.

Solução. Temos

$$(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

para $|x| < 1$, logo

$$\ln(1+x) = \int \frac{1}{1+x}dx = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \right) dx \overset{8.1.3}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \int (-1)^n x^n dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

para $|x| < 1$ pelo Teorema 8.1.3.

Temos que $f(0) = \ln(1+0) = 0 = C + \sum_{n=0}^{\infty} 0$, portanto $C = 0$.

Note que para $x = 1$ a série $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1}$ converge (pela regra de Leibniz). Assim, pelo Teorema 8.1.2,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

para $x \in (-1,1]$. Observe que

$$\ln(1+1) = \ln 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

;-)

■ **Exemplo 8.10** Ache a expansão em série de potências em torno de $x = 0$ para a função $f(x) = \arctan x$.

Solução.

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

para $|x| < 1$, portanto

$$\arctan x = \int \frac{1}{1+x^2}dx = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \right) dx \overset{8.1.3}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \int (-1)^n x^{2n} dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

para $|x| < 1$.

Para encontrar C note que

$$f(0) = \arctan 0 = 0 = C + \sum_{n=0}^{\infty} 0,$$

assim $C = 0$. Observe que para $x = 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1},$$

e a série converge (pela regra de Leibniz). Logo (pelo Teorema 8.1.2) temos

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}, \quad -1 \le x \le 1$$

e

$$\arctan 1 = \frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

;-)

■ **Exemplo 8.11** Ache primitiva e derivada da função

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}.$$

Achamos R e I. Temos $R = \frac{1}{l}$, com $l = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$. Assim $R = 1$. Se $x = 1$, a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ diverge (série harmônica). Se $x = -1$, logo $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ converge (pelo Teste de Leibniz). Portanto a função está definida em $I = (-1, 1]$. Agora

$$\int f(x)dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n+1}\right) dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2},$$

e raio de convergência é R_1=1 pelo Teorema 8.1.3. Se $x = 1$, logo $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ converge (harmônica generalizada com $p = 2 > 1$). Se $x = -1$, então $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$ converge (pelo Teste de Leibniz). Assim a primitiva está definida em $I_1 = [-1, 1]$.

Além disso

$$f'(x) = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}\Big)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^{n-1},$$

O raio de convergência da última série é $R_2 = 1$ (pelo Teorema 8.1.3). Agora se $x = \pm 1$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^{n-1}$ diverge, pois x_n não tende ao 0 quando $n \to \infty$. Portanto $f'(x)$ está definida em $I_2 = (-1, 1)$.

Obs Sejam

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n : I \to \mathbb{R} \\ \int f(x)dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n (x-a)^{n+1}}{n+1} + C : I_1 \to \mathbb{R} \\ f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1} : I_2 \to \mathbb{R}, \end{aligned}$$

logo

$$I_2 \subseteq I \subseteq I_1$$

■ **Exemplo 8.12** Ache a soma da série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot 3^n \cdot 16n^2 \cdot x^{4n}$.

Solução. Temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot 3^n x^{4n} = \frac{1}{1-(-3x^4)} = \frac{1}{1+3x^4}$$

para $|3x^4| < 1$ ou $|x| < \dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$.

$$\Big(\frac{1}{1+3x^4}\Big)' = -\frac{-12x^3}{(1+3x^4)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 3^n 4n \cdot x^{4n-1},$$

$|x| < \dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$, ou seja

$$-\frac{-12x^3}{(1+3x^4)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 3^n 4n \cdot x^{4n-1}.$$

Agora calculando a derivada, temos

$$\begin{aligned}\Big(-\frac{-12x^3}{(1+3x^4)^2}\Big)' &= \frac{-12\cdot 4\cdot x^3(1+3x^4)^2 + 12x^4\cdot 12\cdot x^3\cdot 2\cdot(1+3x^4)}{(1+3x^4)^4} = \frac{-48x^3(1+3x^4-6x^4)}{(1+3x^4)^3}\\ &= \frac{-48x^3(1-3x^4)}{(1+3x^4)^3} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 3^n 16n^2 x^{4n-1},\end{aligned}$$

$|x| < \dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$, assim

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 3^n 16n^2 x^{4n-1} = \frac{-48x^3(1+3x^4-6x^4)}{(1+3x^4)^3},$$

para $|x| < \dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$. ;-)

■ **Exemplo 8.13** Ache a soma de série

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Solução. Procuremos primeiro R e I. Temos

$$\lim_{n\to\infty}\Big|\frac{x_{n+1}}{x_n}\Big| = \lim_{n\to\infty}\Big|\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\cdot\frac{2n+1}{x^{2n+1}}\Big| = x^2\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+3} = x^2.$$

Portanto $R = 1$. Se $x = 1$, a série $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2n+1}$ diverge e se $x = -1$, a série $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{-1}{2n+1}$ diverge. Portanto $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$ está definida no $I = (-1,1)$. Agora

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}x^{2n} = \frac{1}{1-x^2},$$

$|x| < 1$. Temos

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int\frac{1}{1-x^2}dx = \int\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\Big)dx = \frac{1}{2}(\ln(1-x)-\ln(1+x)) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+C$$

Como $f(0) = 0 = \frac{1}{2}\ln\frac{1+0}{1-0} + C$, logo $C = 0$. Portanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}, \quad |x| < 1.$$

;-)